Gewöhnliche Differentialgleichungen NWI: Präsenzübung 2
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 1 Überprüfe, ob die Kurve

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(i\sqrt{c}t) - \exp(-i\sqrt{c}t) \\ i\sqrt{c}\exp(i\sqrt{c}t) + i\sqrt{c}\exp(-i\sqrt{c}t) \end{pmatrix}$$

der Anfangswertaufgabe

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}; \ \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i\sqrt{c} \end{pmatrix}$$

für $c > 0$ genügt.
Bemerkung: Die Komponente z_1 löst das Anfangswertproblem $u''(t) = -cu(t)$; $u(0) = 0, u'(0) = 2i\sqrt{c}$ für $c > 0$. Wir werden lernen jede Differentialgleichung höherer Ordnung auf ein System erster Ordnung zu reduzieren.

Aufgabe 2 Zeichne das Richtungsfeld der Differentialgleichung $u'(t) = t + u(t)$ in das Gitter $([-3, 1] \times [0, 2]) \cap \mathbb{Z}^2$. Wie lauten die Nullklinen? Skizziere die Lösung der Differentialgleichung, die durch den Anfangswert $u(-1) = 1$ verläuft.

Aufgabe 3 Betrachte die autonome Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 + \frac{u_2}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Zeichne das *Phasenbild* im Bereich $([-1, 2] \times [-1, 2]) \cap \mathbb{Z}^2$.

b) Markiere den Bereich in denen senkrechte bzw. waagerechte Pfeile auftreten. Wie verhalten sich die Lösungen, die diese Bereiche schneiden?

c) Wie lauten die *Gleichgewichtspunkte* der Differentialgleichung?

d) Skizziere die Lösung der Differentialgleichung, die durch den Punkt $(1, 0)$ verläuft.